

【問題分析】

大問1は、分野の異なる計算力を必要とする客観形式の小問が2～3題出題されている。

2010年(1) 4次方程式の係数、(2) 定積分と極限、(3) 対数計算

2009年(1) (ア) 2次関数 (イ) 定積分と極限、(2) 確率

2008年(1) 微分計算、(2) 積分計算、(3) 分数関数の最大値

計算量は割りと多いので、客観形式であることを利用して、やや高度(高校数学+α)の公式が使えたら使った方がよい。

(極限のロピタルの定理) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (ただし $\frac{f(x)}{g(x)}$ は不定形)

これは2010年、(2)で $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ を示すのに使われる(確認!) グラフ的には明らか。

(漸化式による積分公式)

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ について $I_{n+2} = \frac{n}{n+1} I_n$ (n = 1, 2, 3, ...) より

$I_6 = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$ など

これは2008年の(2)の途中計算で使うと、計算時間が短縮できる。

大問2, 3, 4について。

2010年、大問2は有名な反転の問題、しっかり問題集をこなしていれば、20分くらいで解けるでしょう。

大問3は、行列の固有値によるn乗計算を使うが、(1)、(2)は成分の数列の不等式による証明問題であり、(3)は、ハサミウチによる極限なので、本質的には数学IIIと言える。

(1)、(2)の証明法は「差をとって計算して正・負を示す」という典型的なものであるが、慣れていないと途中で迷うかもしれない。この辺は、大手予備校の講義を聞き流すような勉強法では、確実に得点することは難しい。不等式の攻略は、条件によって色々なテクニックが使えるので、まさに系統的な問題演習で頭脳と手を動かす、実践力を鍛える必要がある。経験を生かしたオリジナルなテキストを使うのが一番いいでしょう。(3)は(1)(2)の結果を用いて、ハサミウチに持ち込むのだが、あせってはいけない。ここも、どれだけ良問を演習してきたかが問われるところでもある。予備校の講義で、「大体やり方がわかった。」という程度では、本番では時間ばかりかかり最後まで解けない、ということになりかねない。予備校の講義は、生徒に「解法がわかる」ところまでは教えるが、「解ける」ところまで確実に指導するわけではない。「解ける」には、解法を実践する本人の汗と努力?がどうしても必要なのである。自分では問題を解ききれない受験生にとっては、オリジナルなテキストで問題演習のコツを体験させる個別指導は、最後まで問題を「解ける」ようにする近道だとも言える。もちろん、数学には王道はない(古代ギリシアのエウクレイデスの格言)なのであるが、努力しただけ「解ける」ようになる近道は存在するのである。

大問4は、有名な積分と不等式の問題である。(1)は、差をとって計算しても良いが、グラフを書いてy方向の値を比べると、直感的に証明することが出来る。(2)は、関数の大小関係から定積分の大小関係が決まる、という有名な原理を用いる。(3)は(2)の a に 1/2 を代入すれば良い。

(積分・不等式原理)

$a \leq x \leq b$ で $f(x) \leq g(x)$ ならば $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$ が成立

(積分としての=は、 $f(x) = g(x)$ 、恒等的に一致のときのみ)

この原理は、教科書ではそれほど強調されていないが、理工系ではよく出題される有名な原理である。