プロ家庭教師が斬る！

医大入試解剖 東京医科歯科大2010年度［数学］

首都圏の公立大医学部を考えた場合、東京大学（理 III）を別格とすれば、現状では慶応大医学部と並んで難関なのが東京医科歯科大ということになります。現在では千葉大医学部とほぼ同じ偏差値になってきていますが、その昔国立大学が２期制の頃は２期校（後期）の東京医科歯科大は、信州大医学部と並んで１期校（前期）の東大や千葉大の医学部のすべり止め的な存在の大学（注、２期校の大学の内容が決して低いというわけではありません。）であったことを思うと、やはり首都圏人気というものは相当なものなのでしょう。（注：東大医学部は偏差値は異常に高いですが、適性問題もあり一時医師国家試験の合格率がやや低い時期が過去にありました。）数学については、横浜市立大や千葉大は試験時間も１２０分で入試問題として定石的な難問（難し過ぎない範囲の）が多く、しっかり準備すれば７～８割以上の合格点は比較的取りやすいのですが、東京医科歯科大はそういうわけにはいきません。まず試験時間が９０分で大問が３題なのに、高校生が非常に解きにくく感じる問題が多いのです。逆に言えば６割位でも合格出来る年度もあります。（もちろん他教科の成績にもよりますが。）東大の数学でもある程度定石的な難問が含まれており、しっかり準備した受験生はそれなりに得点をかせぐことが出来ますが、東京医科歯科大の場合は定石的な問題が少なく（どちらかと言うと数学オリンピックのような問題）かつ計算量も多く、受験生が心理的に追い込まれやすい問題が多いと言えます。（ただ２０１０年は比較的手がつけやすく７割は解けるでしょう。）
その理由を列挙すると以下のようになります。

１）入試問題が、高校数学をやや離れた分野で意図的に作られている。
２）高校生がすぐに意味が理解出来にくい問題文を意図的に作っている。
３）小問が多い割に、誘導が少なく関連性がわかりにくい。
４）小問が多く計算量が多い。

東大の場合、難問の場合は小問が少ないのでゆっくり時間をかけて、試行錯誤しながら問題分析をすることが出来ますが、東京医科歯科大の場合は問題がわかりにくくても小問が多く計算量も多いため、どうしてもあせってしまい得点に結びつきにくいとも言えます。その結果、難問であっても東大の数学のような上品な格調の高さ（数学の美しさ？）は感じにくくなります。
さて上のような原因は何かといえば、それは問題を出題する側にあります。東京医科歯科大は国立大では数少ない教養部がありますが数学の専任の教官の数は少なく、近年退官したN名誉教授、および現役ではK教授、T准教授、N准教授、の３人になります。これらの専任の先生方が入試問題を制作されているわけですが、数学の専門研究分野にやや片寄りがあると言えるでしょう。昔の国立大の教養部や理学部の数学科では、解析学・幾何学・代数学・応用数学の先生方がバランスよく配置されていていましたが、東京医科歯科大の場合、専任の数学の教官は３人しかいないにかかわらず研究分野はやや片寄っています。退官したN先生の専攻は代数的組み合わせ論で、K先生は代数学・有限群の表現論、T先生はグラフ理論・離散幾何、となっており（東京医科歯科大のＨＰより）、大きく分けると代数系のみということになっていて、研究対象が解析学や幾何学のような連続体（実数、複素数で構成される集合）ではないので、一般的に高校数学とは関係の少ない、独特の個別的なテクニックが必要なことが多いと言えるでしょう。逆に、２００９年に赴任したN先生は工学部出身で、応用解析・生物数学を研究分野として専攻されていて、大学でも生物数学を担当しています。過去の多くの入試問題は、退官したN先生やO先生、T先生が作ってきたということになります。もちろんこれらの先生方が、より定石的な入試問題を作れないということはありません。長く教養部で教えていれば、自然に高校数学に精通していくからです。おそらく東京医科歯科大の偏差値上昇による受験生のレベルアップによって、ある程度難問を増やす方向性が確立していったということだと思いますが、高校数学からややはずれた所で問題を作るところに、専門分野の影響が現れていて、（東大を意識しつつ）わざと合格点を低く抑える結果につながっていったと思われます。

（２０１０年の問題分析）
まず例年に比べ易化したとされる２０１０年の問題を振り返ってみましょう。

［大問１］
不等式の問題ですが（２）（３）では文字が３つあり、高校生のやや苦手とする分野です。高校数学では基本的に関数は１変数であり、２変数以上の関数のグラフや、その偏微分や重積分は扱っていません。

数Ｉで扱われる３変数の公式は教科書では

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$
$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$

などしかありません。さて問題の解き方ですが、一般に「不等式は差をとって符号を調べる」という事になります。（1）はそれで解けます。（2）は少し難しいでしょう。数Ⅱや数Ⅲの関数の問題では、
$f(x)>g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)>0$　より関数　$h(x)=f(x)-g(x)$　を微分やグラフで調べるということになります。
しかし（2）のように文字が３つですと同じ様には出来ません。さてこの４つの数（正確には数ではなく、３変数の関数！）で、a、b、c、は正の実数であるとなっています。したがって

$$f_1(x,y,z)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$$
$$f_2(x,y,z)=(x+y+z)(xy+yz+zx)$$
$$f_3(x,y,z)=3(x^3+y^3+z^3)$$
$$f_4(x,y,z)=9xyz$$

の４つの３変数関数の大小を、$x>0$、$y>0$、$z>0$、で比べるということになります。
問題文に「４数を、小さい順に並べよ。」とありますから、４つの関数値の大小が途中で入れ替わることはありません。したがって、$x=1$、$y=2$、$z=3$、をこの４つの関数に代入すると、

$$f_1(1,2,3)=84,\quad f_2(1,2,3)=66,\quad f_3(1,2,3)=108,\quad f_4(1,2,3)=54$$

となり４つの関数の大小がわかります。（センター試験ではこれでＯＫ）後は２つずつ差をとって式変形すればよいでしょう。微分などが使えないので見通しは良くないです。
（3）は　x、y、zの分数関数

$$f(x,y,z)=\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}$$

の　$x>0$、$y>0$、$z>0$、での値域を調べる問題です。一般的に　x、y、z　の偏微分を使って解くと、$(x,y,z)=(1,1,1)$で停留点をとり、そこで最小値$f(1,1,1)=6$、をとることがわかります、よって$f(x,y,z)\geqq 6$、となります。しかし高校数学としては、そのように自然に解くことは出来ません。まず（2）の適用が考えられるが、このままの形では（2）との関連性が薄い。実は上の$f(x,y,z)$は**対称式の基本定理**によって「x、y、zの対称式なので、x、y、zの基本対称式で表される。」のです。（代数学の美しさ？）式変形すると、

$$f(x,y,z)=\frac{(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz}{xyz}$$

となり、これにより（2）の利用が可能になります。
注）代数系の数学者は、文字式を見たときに式や数と思うが、解析系の数学者は関数、幾何学系の数学者は、座標と考えることが多い。

［大問２］
空間座標の問題であり、これも高校生が苦手とする分野である。その理由はハッキリしています。実は、数Ⅱの「図形と方程式」は平面の解析幾何学しか扱わないからです。「空間ベクトル」では準備として空間座標が出てきますが、空間の解析幾何学は充分に扱われていません。（戦前の旧制高校では、きっちり立体解析幾何学まで扱われていました）例えば曲面の方程式、$z=xy$が空間の中でどのような形をしているか？という問題は扱われていません。（この辺は大学数学の重積分の所で必要になります。）また立体図形を多くの部分集合の共通部分で表すことも、一般に高校数学で扱われているわけではありません。集合による数学表現は、大学の数学科では常識ですが、他の学科で必ずしも必要というわけではありません。２００７年の大問２も、かなりの量の条件を読解させる確率の問題が出題されて受験生を悩ませましたが、９０分という試験時間を考えると小問が７つもあるというのも、計算量として疑問に思います。多分、大問１と大問３を例年よりやさしくした？ので、大問２を無理に重たくしようとする、出題者の心理が働いたのかもしれません。したがって問題を解く順序としては、問題分析に時間がかかり過ぎると感じたのなら、大問２より大問３を先に手をつける方が、全体として得点しや

すかったと思われます。

さて、問題文に登場する正８面体　$\alpha_t(\mathrm{P})$　、$\mathrm{P}=(x, y, z)$　は、原点（０，０，０）を中心として６点、（ｔ、０，０）（－ｔ、０，０）（０、ｔ、０）（０、－ｔ、０）（０，０、ｔ）（０，０、－ｔ）を頂点とする正８面体を、中心が点Ｐ(ｘ、ｙ、ｚ）になるように平行移動したものと考えると少しわかりやすいでしょう。後はこの小さい正８面体たちを実際に、空間座標に書き入れていって判断するしかありません。このような空間図形の分析を必要とする難問は、よく東大に出題されますが空間座標の書き方などに慣れていないと、かなりの時間を費やすでしょう。(実際に正８面体の模型を使えば、中学生にもわかるのですが・・・)（１）は　０＜ｔ＜１では、共通部分がないので簡単です。（２）は幾何学的な考察が苦手な人は、ｘｙ平面、ｙｚ平面、ｘｚ平面における交点を考えると共通部分が見えやすいでしょう。（３）は（２）を利用しないとメンドウです。まず
０＜ｔ＜１／２　では共通部分はありません。　１／２＜ｔ　では、対象性から（２）のような形が１２個できます。誘導が与えられていないので、気づくまで時間がかかるかもしれません。(対称性は、難関大攻略の重要なポイントです。)（４）（５）（６）は簡単です、時間がなければ、（３）よりこちらから先に解いた方が良いでしょう。（７）は（３）が出来ていれば計算問題です。

注）集合による表現は、正確に数学的対象を分析するのに重要です。例えば高校数学では　ａ＜ｘ＜ｂ　と書いたときに、これが開区間（ａ，ｂ）そのものを表すのか、単に　ｘ　が開区間（ａ，ｂ）に含まれていることを表すのか、区別できません。(前後の文脈を考えるしかない！）個数の処理や確率の問題でも、複雑な場合は、集合で考えるとスッキリします。

［大問３］
計算はやや複雑なところもありますが、積分などがからむ２次曲線の問題としては、難関大としては標準的なレベルでしょう。こちらをやや早く解ければ、大問２の問題文析を少し落ち着いて取り組むことが出来ます。

（２００９年までの問題分析）
合格可能な点数は、２００９年は６割、２００８年は７割、２００７年は６割、２００６年は６割、位でしょう。毎年問題の傾向が変わるのは、出題者が毎年交代するせいであると思われます。２００７年はやや得点しやすいですが、大問２，３で小問の間の関係を読み取る読解力がないと、高得点には結びつきません。ただ東大や東工大に似たような問題があるので、それらを充分演習・理解していれば、８割以上得点することも可能です。しかし高校数学からやや離れたところで問題が作られていますので、たとえ問題が解けたとしても、問題の意味が理解出来ないこともあるでしょう。(東大も同じ)
２００９年から少し気になった問題を見ていきましょう。
２００９年**大問１**は、平面･空間の格子点の問題ですが、よく出題される数列の和に還元する格子点の個数の問題ではありません。初等整数論でミンコフスキーが創始した「格子の幾何学」と呼ばれる分野の雰囲気です。この分野では次のミンコフスキーの定理が有名です。(高木貞治「初等整数論講義」より)

［ミンコフスキーの定理］
ｘｙ平面上で格子点を中心にして面積４の平行四辺形を描けば、その内部または周上に中心以外の格子点が必ず含まれる。(この平行四辺形は、面積４なる凸形に一般化される)
（１）は補集合である内部に格子点をふくむ（円を動かした）領域を考えるとわかりやすいでしょう。
（２）は、格子点達からもっとも遠いところにある点は、一番小さい正方形の頂点になる４つの格子点の中心（対角線の交点）であることに気づけば、格子点を内部に含まない半径の最大値が、$\sqrt{2}$／２　になりますので、$\sqrt{2}$／２＜０．７５　からわかります。（３）も同様。多分、この問題を考案された先生は、離散幾何が専門のＴ先生かもしれません。
注）平行四辺形の格子点問題は、過去に京大や東大でも出題されています。

大問２も、２次関数　ｆ（ｘ）の整数値を扱う整数論の問題で、過去に類題が時々出題されています。
条件Ｃ「３で割り切れないすべての整数　ｘ　についてｆ（ｘ）が整数になる。」はどういう意味？　などと思わずに　ｆ（１）＝a＋b＋c，　ｆ（２）＝４a＋2b＋c，　ｆ（－１）＝a－b＋c　などが整数になる、として使えば良いでしょう。高校数学から離れたところで問題が作られていますから、無理に解釈しようとしない方が懸命です。

（1）は、$g(x)=f(x+3)-f(x)=6ax+3(3a+b)$ の係数 $6a$ 、$3a+b$ が、
$f(1)$、$f(2)$、$f(-1)$ たちの整数倍の和・差で表されるのでＯＫです。

（2）は $f(1)=a+b+c=1$ のとき、a,b,c は有理数になるので厳密に言うと整数問題ではありませんが、約数条件などで候補をしぼれますので、同じように出来ます。
まず、$2b=f(1)-f(-1)$ なので、$0<b<1$ から $b=1/2$ となります。 （1）より $6a$ は整数なので、$0<a<1/2$ より $a=1/6, 1/3$ のいずれかになりますが、$3a+b=3a+1/2$ が整数となるので、$a=1/6$ がわかります。よって $c=1/3$ となります。問題文には（1）との関連性は全く書かれていませんが、他に材料はありませんので、積極的に利用しましょう。

注意）厳密に言うと、条件Ｃを満たす $f(x)$ で $f(1)=1$ を満たすものが存在する、とは限りません。
したがって、上で求めた $f(x)$ が実際に条件Ｃを満たすことを、確認する必要があります。
$f(1)=1$、$f(2)=2$、$f(-1)=0$ より、この $f(x)$ について（1）が成立し、（1）より $f(4)=f(1)+g(1)$、$f(5)=f(2)+g(2)$ は整数となることがわかり、数学的帰納法によって、$f(x)$ は条件Ｃを満たすことがわかります。

（3）は、まず上の注意で説明したことから、「条件（c）$\Leftrightarrow f(1)$、$f(2)$、$f(-1)$ が整数」となります。 $f(1)$、$f(2)$、$f(-1)$ を整数とすると、
$f(1)+f(-1)=2b$ 、$f(2)-f(1)=3a+b$ は整数となり、$f(1)=a+b+c$
より $m_1=2$、$m_2=3$、$m_3=1$ が１組の候補なります。 （3）より $f(1)=1$ とすると、$a=1/6$
$b=1/2$ $c=1/3$ となるので、最小性がわかります。

（4）は、（3）より $f(1)=a+b+c=n$ 、かつ $2b$、$3a+b$ が整数となる (a,b,c) の組の個数を求めれば良い。 a,b,c は整数ではなく有理数なので、少しメンドウです。 定石的に解くには、次のように整数問題に変換すると良いでしょう。 $a+b+c=n$ より $2b=k$, $3a+b=m$
とおいて a,b,c を未知数と見て解くと $a=1/6(2m-k), b=k/2, c=1/3(3n-k-m)$ となるので
$a>0, b>0, c>0$ より $0<k<2m, 0<k+m<3n$ をみたす自然数の組 (k,m) の個数を求めれば良い。それは、$0<y<2x$, $0<x+y<3n$ をみたす xy 平面の領域内にある格子点数を求めれば良い。格子点の問題としては基本です。

注）組み合わせ的に答えをさがす必要があるので、同じようなムードの問題に慣れてないと、３０分以内に解くことは非常に難しいでしょう。整数問題が苦手な人は**大問３**から先にやると良いでしょう。
こちらも計算量はありますが、数 III の入試数学をキッチリやっておけば大丈夫です。
２００８年は、**大問２**は（2）と（3）の関係が面白く、（2）の $t=\pi/2$ の場合が（3）の数列であることに気づけば解けるでしょう。**大問３**は関数方程式の問題で、条件（c）の代数的加法公式、
$f(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$ より大学数学（関数論）の知識があれば、$f(x), g(x)$ は三角関数の拡張としての双曲線関数であることがわかり,（4）の条件から $f(x)=\cosh(2x), g(x)=\sinh(2x)$
となります。$\cosh x=1/2(e^x+e^{-x})$, $\sinh x=1/2(e^x-e^{-x})$ で定義され、双曲線 $x^2-y^2=1$ のパラメーター表示を表します。

（合格の為の対策）
毎年出題傾向が変わるのは、出題者が変わるせいでしょう。同じ出題者は、同じ傾向がありますから、過去問を幾つかのパターンに分けて、系統的に問題演習すれば合格点は確保できます。年度によっては、数学で「点数をかせぐ」ことは難しいかもしれませんが、しっかり準備すれば合格点を取ることは「常に可能」です。しかし普通の予備校や市販の数学テキストでは、よほど数学が優秀でないと難しいでしょう。医学部をめざす受験生が、上記のような数学オリンピックまがいの難問を短い時間で解くことを強制される、というのは教育的にはいささか問題があるようにも思われます。以前、慶応大入試の受験英語の分量があまりに多すぎて、河合塾の本部長が『悪問だらけの大学入試』という新書を書いて批判したことがありましたが（その結果、やや入試問題は改善されました）、東京医科歯科大の数学も、作成する専任教官の専門分野が偏り、高校数学からわざと離れた分野で「点数を低くする」ことを意識した入試問題が出題されているとすれば、改善の余地があると言えるでしょう。

（三富 記）